第26卷 第5期
2009年10月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 26 No. 5
Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0883-07

时间标度上二阶周期边值问题解的存在性

刘会灵[1]， 彭世国[2]

(1- 广东白云学院基础教学部，广州 510450； 2- 广东工业大学自动化学院，广州 510090)

摘 要: 运用Mawhin的重合度定理，讨论了一类时间标度上非线性动态方程周期边值问题的解的存在性，得到判别方法并举例作以说明。

关键词: 时间标度；周期边值；动态方程；非线性

分类号: AMS(2000) 34B15 **中图分类号**: O231 **文献标识码**: A

1 引言

1988年德国的Stefen Hilger在他的博士论文中首次提出测度链(measure chain)上的微积分理论[1]，用以统一连续和离散的研究。时间标度(time scale)是一个特殊的测度链，表示实数上的任意非空闭子集，下面简称时标，用“$\mathbf{T}$”来表示。它的诞生统一了差分方程和微分方程的研究。在随后的许多数学家，特别是德国数学家M.Bohner等人的不断努力下，这一理论得到极大发展，逐步形成较完善的时标动态方程理论[2,3]。时标动态方程理论不仅是数学界的一次理论突破，而且在应用上有着巨大的潜力。比如美国的托马斯和彼得森运用时标动态方程理论弥合了西尼罗河病毒传播中连续和离散之间的空隙。托马斯认为这种数学模型是研究和控制这种疾病的最有效的工具。除此之外一些科学家已经开始研究利用时标改进股票市场的计算模式，还有的科学家利用时标精确计算发动机的油耗量。

本文运用Mawhin的重合度定理讨论周期边值问题

$$\begin{cases} u^{\Delta\Delta}(t) = f(t, u(t), u^{\Delta}(t)), \quad t \in [a,b] \\ u(a) = u(b), \quad u^{\Delta}(a) = u^{\Delta}(b), \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，得出判别法并举例。其中$[a,b]$表示$[a,b]\cap\mathbf{T}$，$a,b\in\mathbf{T}$，且$0<b-a<1$，这里假设b点右稠，f在$[a,b]\times\mathbf{R}^2$上连续。

由于篇幅问题，本文对所涉及的时间标度方面的知识不再赘述，请读者参阅文献[3]。

2 准备知识

定义1 设X, Z是赋范空间。$L: X\supset \mathrm{dom}L\to Z$是一个线性算子，如果

(a) $\mathrm{Im}L$是Z的闭子空间；

(b) $\mathrm{dimKer}L=\mathrm{codimIm}L<+\infty$，则称$L$为指标为零的Fredholm算子。

如果L是指标为零的Fredholm算子，则存在连续算子$P: X\to X$及$Q: Z\to Z$，使得

$$\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L, \quad \mathrm{Im}L=\mathrm{Ker}Q, \quad X=\mathrm{Ker}L\oplus\mathrm{Ker}P, \quad Z=\mathrm{Im}L\oplus\mathrm{Im}Q,$$

收稿日期: 2008-03-06. **作者简介**: *刘会灵(1977年9月生)，女，硕士，讲师. 研究方向：微分方程与微分动力系统.*

并且算子 $L\mid_{\mathrm{dom}L\cap\mathrm{Ker}P}$: $\mathrm{dom}L\to\mathrm{Im}L$ 可逆，记其逆算子为 K_P。I 为恒等算子，记 $K_P(I-Q)$ 为 $K_{P,Q}$。

定义2 设 Ω 是 X 中的有界开集，如果 $QN(\overline{\Omega})$ 有界且 $K_{P,Q}N:\overline{\Omega}\to X$ 是紧的，则称 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的。

若 L 是指标为零的Fredholm算子，则对任意同构映射 $J:\mathrm{Im}Q\to\mathrm{Ker}L$，映射 $JQ+K_{P,Q}:Z\to\mathrm{dom}L$ 是同构映射，并且对任意 $u\in\mathrm{dom}L$，$(JQ+K_{P,Q})^{-1}u=(L+J^{-1}P)u$。

在证明中，本文运用到以下Mawhin定理[4]：设 $\Omega\subset X$ 是有界开集，L 是指标为零的Fredholm算子，N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的。如果下列条件成立

(I) $Lu\neq\lambda Nu$，$(u,\lambda)\in((\mathrm{dom}L\backslash\mathrm{Ker}L)\cap\partial\Omega)\times(0,1)$;

(II) $Nu\notin\mathrm{Im}L$，$u\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$;

(III) $\deg(JQN|_{\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega},\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\neq0$,

其中 $Q:Z\to Z$ 是连续映射，并且 $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L, J:\mathrm{Im}Q\to\mathrm{Ker}L$ 是一个同构映射，则方程 $Lu=Nu$ 在 $\mathrm{dom}L\cap\overline{\Omega}$ 上至少有一个解。

记 $X=C^2[a,b]$，$Z=C[a,b]$，对于任意 $u\in X$，定义 $\|u\|=\sup\{\|u\|_0,\|u^{\Delta}\|_0\}$，其中

$$\|u\|_0=\sup_{t\in[a,b]}\|u(t)\|.$$

对任意 $u\in Z$，定义

$$\|u\|_1=\frac{1}{b-a}\int_a^b|u(t)|\Delta t.$$

定义线性算子

$$L:X\supset\mathrm{dom}L\to Z,\quad Lu=u^{\Delta\Delta};\quad N:X\to Z,\quad Nu=f(t,u(t),u^{\Delta}(t)),$$

其中 $\mathrm{dom}L=\{u\in X:u(a)=u(b),\ u^{\Delta}(a)=u^{\Delta}(b)\}$。

3 结论

引理1 $L:X\supset\mathrm{dom}L\to Z$ 是一个指标为零的Fredholm算子。

证明 通过简单证明易得

$$\mathrm{Im}L=\Big\{g\in Z\Big|\int_a^b g(\tau)\Delta\tau=0\Big\}.$$

定义线性连续算子 $Q:Z\to Z$ 为

$$Qg=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(\tau)\Delta\tau,$$

显然 $Q^2g=Qg$，也就是 $Q:Z\to Z$ 是一个投影算子。可见 $\mathrm{Im}L=\mathrm{Ker}Q$。任意 $g\in Z$，均有 $g=(g-Qg)+Qg$。$g-Qg\in\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L$，并且 $Qg\in\mathrm{Im}Q$，因此 $Z=\mathrm{Im}L+\mathrm{Im}Q$。若 $g\in\mathrm{Im}L\cap\mathrm{Im}Q$，那么 $g\equiv0$，因此 $Z=\mathrm{Im}L\oplus\mathrm{Im}Q$。因为 $\mathrm{dom}L=\{u\in X\,|\,u(a)=u(b),\ u^{\Delta}(a)=u^{\Delta}(b)\}$ 且 $Lu=u^{\Delta\Delta}$，故 $\mathrm{Ker}L=R$，$\dim\mathrm{Ker}L-\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}L=\dim\mathrm{Ker}L-\dim\mathrm{Im}Q=0$，即 $L:X\supset\mathrm{domL}\to Z$ 为一个指标为零的Fredholm算子。 **证毕**

定义连续线性算子 $P: X \to X$ 为 $P(u(t)) = u(a)$，$t \in [a,b]$。任意 $u \in X$，均有 $u(t) = u(a) + (u(t) - u(a))$。显然 $X = \mathrm{Ker}L \oplus \mathrm{Ker}P$，那么 P, Q, L 满足

$$\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L, \quad \mathrm{Im}L = \mathrm{Ker}Q, \quad X = \mathrm{Ker}L \oplus \mathrm{Ker}P, \quad Z = \mathrm{Im}L \oplus \mathrm{Im}Q.$$

定义 $K_P : \mathrm{Im}L \to \mathrm{dom}L \cap \mathrm{Ker}P$ 为

$$K_P g(t) = \int_a^t \int_a^\tau g(s)\Delta s \Delta\tau - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b \int_a^\tau g(s)\Delta s\Delta\tau,$$

$$\sup_{t\in[a,b]} \left|K_P g(t)\right| \le 2(b-a)^2\|g\|_1, \quad \sup_{t\in[a,b]} \left|[K_P g(t)]^\Delta\right| \le 2(b-a)\|g\|_1, \tag{2}$$

因此

$$\|K_P g\| \le 2(b-a)\|g\|_1. \tag{3}$$

对任意 $g \in \mathrm{Im}L$，有

$$(LK_P)g(t) = \Big(\int_a^t \int_a^\tau g(s)\Delta s\Delta\tau - \frac{t-a}{b-a}\int_a^t \int_a^\tau g(s)\Delta s\Delta\tau\Big)^{\Delta\Delta} = g(t),$$

另外，对任意 $u \in \mathrm{dom}L \cap \mathrm{Ker}P$，有

$$(K_P L)u(t) = \int_a^t \int_a^\tau u^{\Delta\Delta}(s)\Delta s\Delta\tau - \frac{t-a}{b-a}\int_a^t \int_a^\tau u^{\Delta\Delta}(s)\Delta s\Delta\tau = u(t) - u(a) = u(t),$$

因此 $K_P = (L|_{\mathrm{dom}L\cap\mathrm{Ker}P})^{-1}$，

$$QNu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau))\Delta\tau,$$

$$\begin{aligned} K_{P,Q}Nu(t) &= K_P(I-Q)Nu(t) \\ &= \int_a^t \int_a^\tau (I-Q)Nu(s)\Delta s\Delta\tau - \frac{t-a}{b-a}\int_a^t \int_a^\tau (I-Q)Nu(s)\Delta s\Delta\tau. \end{aligned}$$

为了叙述方便做一下假设：

(H_1) 存在常数 $A > 0$，对任意 $u \in \mathrm{dom}L \cap \mathrm{Ker}L$ 且满足 $|u(t)| > A$，$t \in [a,b]$ 都有 $QNu \neq 0$；

(H_2) 存在可积函数 α, β, ρ，其中 α, β 满足

$$\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1 < \frac{1-(b-a)}{3(b-a)},$$

使得

$$|f(t, x_1, x_2)| \le \rho(t) + \alpha(t)|x_1| + \beta(t)|x_2|;$$

(H_3) 存在常数 $B>0$，对任意 $|c|>B$, $c\in\mathbf{R}$ 满足

$$c\int_a^b f(s,c,0)\Delta s>0,\quad \text{或}\quad c\int_a^b f(s,c,0)\Delta s<0.$$

定理 1 若 $(H_1),(H_2),(H_3)$ 成立，则周期边值问题 (1) 至少存在一个解。

证明 设 $\Omega_1=\{u\in \mathrm{dom}L\setminus \mathrm{Ker}L: Lu=\lambda Nu,\ \lambda\in(0,1)\}$。任意 $u\in\Omega_1$，均有 $u\notin \mathrm{Ker}L$，又 $\lambda\neq 0$，故 $Nu\in \mathrm{Im}L$，又因为 $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L$，所以 $QNu=0$，即

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\tau,u(\tau),u^{\Delta}(\tau))\Delta\tau=0,$$

由条件 $(H1)$ 可知，存在 $t_0\in[a,b]$，满足 $|u(t_0)|\le A$，则

$$|u(a)|=\left|u(t_0)-\int_a^{t_0}u^{\Delta}(\tau)\Delta\tau\right|\le |u(t_0)|+(b-a)\|u^{\Delta}\|_0\le A+(b-a)\|u^{\Delta}\|_0. \tag{4}$$

又

$$u^{\Delta}(t)=\int_a^t u^{\Delta\Delta}(t)\Delta t+u^{\Delta}(a),$$

$$\begin{aligned}|u^{\Delta}(t)|&\le (b-a)\|u^{\Delta\Delta}(t)\|_1+|u^{\Delta}(a)|\\&=(b-a)\|Lu\|_1+|u^{\Delta}(a)|<(b-a)\|Nu\|_1+|u^{\Delta}(a)|.\end{aligned}\tag{5}$$

由式 (4), (5) 可得

$$|u(a)|<A+(b-a)\|Nu\|_1+(b-a)|u^{\Delta}(a)|, \tag{6}$$

又考虑到 (3) 可得

$$\|(I-P)u\|<2(b-a)\|Nu\|_1, \tag{7}$$

由 (6), (7) 可得 $\|u\|\le A+(b-a)\|u^{\Delta}\|_0+3(b-a)\|Nu\|_1$，由于 $\|u\|=\sup\{\|u\|_0,\ \|u^{\Delta}\|_0\}$，结合条件 (H_2) 得

$$\|u\|_0,\|u^{\Delta}\|_0\le A+[b-a+3(b-a)\|\beta\|_1]\|u^{\Delta}\|_0+3(b-a)\|\rho\|+3(b-a)\|\alpha\|_1\|u\|_0,$$

由上式可得

$$\|u\|_0\le \frac{1}{1-3(b-a)\|\alpha\|_1}\{A+[b-a+3(b-a)\|\beta\|_1]\|u^{\Delta}\|_0+3(b-a)\|\rho\|_1\}, \tag{8}$$

$$\|u^{\Delta}\|_0\le \frac{1}{1-(b-a)-3(b-a)\|\beta\|_1}[A+3(b-a)\|\rho\|_1+3(b-a)\|\alpha\|_1\|u\|_0], \tag{9}$$

由 (8), (9) 得

$$\|u^{\Delta}\|_0\le \frac{A+3(b-a)\|\rho\|_1}{1-(b-a)-3(b-a)\|\beta\|_1-3(b-a)\|\alpha\|_1},$$

即存在 $W_1 > 0$，使得 $\|u^\Delta\|_0 < W_1$，由 (8) 知存在 $W_2 > 0$，使得 $\|u\|_0 < W_2$，故 Ω_1 是有界集。令 $\Omega_2 = \{u \in \mathrm{Ker}L : Nu \in \mathrm{Im}L\}$。任意 $u \in \Omega_2$，有 $u = c \in R$ 且 $Nu \in \mathrm{Im}L = \mathrm{Ker}Q$，即

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s,c,0)\Delta\tau = 0,$$

由 (H_3) 可知，$\|u\| = \|c\| < B$，故 Ω_2 是有界集。定义一个同构映射 $J : \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$ 为恒等映射，即 $Jc = c,\ c \in R$。不妨设 (H_3) 中

$$c\int_a^b f(s,c,0)\Delta\tau < 0,$$

令 $\Omega_3 = \{u \in \mathrm{Ker}L : -\lambda J^{-1}u + (1-\lambda)QNu = 0,\ \lambda \in [0,1]\}$，则任意 $u \in \Omega_3$，$u = c \in R$，满足

$$\lambda c = \frac{1-\lambda}{b-a}\int_a^b f(s,c,0)\Delta\tau,$$

若 $\lambda = 1$，则 $c = 0$；若 $|c| > B$，则有

$$\lambda c^2 = \frac{(1-\lambda)c}{b-a}\int_a^b f(s,c,0)\Delta\tau < 0,$$

矛盾，故 $|c| \le B$，$u \in \Omega_3$，故 Ω_3 是有界集。

若设

$$c\int_a^b f(s,c,0)\Delta\tau > 0,$$

则可令 $\Omega_3 = \{u \in \mathrm{Ker}L : \lambda J^{-1}u + (1-\lambda)QNu = 0,\ \lambda \in [0,1]\}$，同样可得到 Ω_3 是有界集。设 Ω 是一个有界开集且

$$\Omega \supset \bigcup_{i=1}^{3}\Omega_i,$$

则可知 $Lu \ne \lambda Nu, (u,\lambda) \in ((\mathrm{dom}L \setminus \mathrm{Ker}L) \cap \partial\Omega) \times (0,1)$，$Nu \notin \mathrm{Im}L$，$u \in \mathrm{Ker}L \cap \partial\Omega$。

下证 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的。因为

$$|QNu| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\tau,u(\tau),u^\Delta(\tau))\Delta\tau\right| \le \|\rho\|_1 + \|\alpha\|_1\|u\|_0 + \|\beta\|_1\|u^\Delta\|_0,$$

故 $QN(\overline{\Omega})$ 有界。

要证 $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \to X$ 是紧的，即证 $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ 是紧集。

由 Arzela-Ascoli 可知须证 $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ 一致有界和等度连续。因为

$$
\begin{aligned}
K_{P,Q}Nu(t) &= K_P(I-Q)Nu(t) \\
&= \int_a^t\int_a^\tau (I-Q)f(s,u(s),u^\Delta(s))\Delta s\Delta\tau - \frac{t-a}{b-a}\int_a^b\int_a^\tau (I-Q)f(s,u(s),u^\Delta(s))\Delta s\Delta\tau \\
&= \int_a^b\int_a^\tau f(t,u(s),u^\Delta(s))\Delta s\Delta\tau + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t,u(\tau),u^\Delta(\tau))\Delta\tau\int_a^t\int_a^\tau \Delta s\Delta\tau \\
&\quad -\frac{t-a}{b-a}\int_a^b\int_a^\tau f(s,u(s),u^\Delta(s))\Delta s\Delta\tau - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(s,u(\tau),u^\Delta(\tau))\Delta s\frac{t-a}{b-a}\int_a^b\int_a^\tau \Delta s\Delta\tau,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[K_{P,Q}Nu(t)\right]^\Delta &= \left[K_P(I-Q)Nu(t)\right]^\Delta \\
&= \int_a^t f(t,u(s),u^\Delta(s))\Delta s + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t,u(\tau),u^\Delta(\tau))\Delta\tau\int_a^t \Delta\tau \\
&\quad -\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^\tau f(s,u(s),u^\Delta(s))\Delta s\Delta\tau - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(s,u(s),u^\Delta(s))\Delta s\int_a^b\int_a^\tau \Delta s\Delta\tau,
\end{aligned}
$$

又由 $f(t,x,y)$ 在 $[a,b]\times\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ 上连续，可知 $K_{P,Q}Nu$, $(K_{p,Q}Nu)^\Delta$ 一致有界。故 $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ 是紧集。因此 N 在 $\overline{\Omega}$ 上为 L-紧。

任意 $u\in \mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$，定义 $H(u,\lambda)=\pm\lambda Ju+(1-\lambda)JQNu$，利用同伦不变性

$$
\begin{aligned}
&\deg(JQN|_{\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega},\ \Omega\cap\mathrm{Ker}L,0) \\
=\ &\deg(H(\cdot,0),\ \Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)=\deg(H(\cdot,1),\ \Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)=\deg(\pm J,\ \Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\neq 0,
\end{aligned}
$$

又由引理 1 知，$L:X\supset \mathrm{dom}L\to Z$ 是一个指标为零的 Fredholm 算子。故由 Mawhin 定理知，周期边值问题 (1) 在 Ω 上至少存在一个解。 **证毕**

4 应用举例

考察周期边值问题

$$
\begin{cases}
u^{\Delta\Delta}(t)=\frac{1}{4}(t+\sigma(t))+\frac{1}{9}\arctan u(t)+\frac{1}{9}u^\Delta(t), & t\in[0,\frac{1}{2}], \\
u(0)=u(\frac{1}{2}), \quad u^\Delta(0)=u^\Delta(\frac{1}{2}),
\end{cases}
$$

取

$$T=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\right\}\cup\left(\frac{1}{2},\ 1\right],$$

取

$$A=B=3,\quad \alpha(t)=\beta(t)=\frac{1}{9},\quad \rho(t)=t+\sigma(t),$$

条件 (H_2) 满足。当 $u(t) > 3$ 时，

$$QNu = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{4}(t+\sigma(t)) + \frac{1}{9}\arctan u(t) + \frac{1}{9}u^{\Delta}(t)\Big)\Delta t = 2\left[\frac{1}{16} + \frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{2}} \arctan u(t)\Delta t\right] > 0,$$

当 $u(t) < -3$ 时，

$$QNu < \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\arctan(-3) = -0.0138,$$

故条件 (H_1) 满足；又当 $c > 3$ 时，

$$c\int_0^{\frac{1}{2}} f(s,c,0)\Delta s > 0;$$

当 $c < -3$ 时，

$$c\int_0^{\frac{1}{2}} f(s,c,0)\Delta s = \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{c}{4}(s+\sigma(s)) + \frac{1}{9}c\arctan c + 0\Big)\Delta s > 0,$$

故条件 (H_3) 满足。由定理1可知该边值问题至少有一个解。

参考文献：

[1] Stefen Hilger. Ein Ma kettekalkul mit Anwendung Auf Zentrumsmannigfultigkeiten[D]. PHD Thesis, University at Wurzburg, 1988

[2] Martin Bohner, Agarwal R P. Quadratic functionals for second order matrix equations on time scales[J]. Nonlinear Analysis, 1998, 33: 675-692

[3] Martin Bohner. Allan Peterson Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications[M]. Boston: BìrkhÄauser, 2001

[4] Guo D J, Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones[M]. New York: Academic Press, 1988

The Existence of Solutions to Second Order Periodic Value Problems on Time Scales

LIU Hui-ling[1], PENG Shi-guo[2]

(1- Department of Basic Teaching, Guangdong Baiyun Institute, Guangzhou 510450;
2- Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090)

Abstract: By using the Mawhin coincidence degree theory, we discuss the existence of solutions to the periodic value problems to the nonlinear dynamic equations on a class of time scales and obtain some results and show an example.

Keywords: time scale; periodic boundary value; dynamic equation; nonlinearity